

Societatea de Științe Matematice din România



GAZETA MATEMATICĂ

seria b

2

publicație lunară pentru tineret
FONDATĂ ÎN ANUL 1895

Număr realizat cu contribuția filialelor
Hunedoara și Caraș Severin ale S.S.M.R.

Anul CXVII, nr. 2/2012
ISSN 1584-9333

SUMARUL

Articole și Note matematice

1. Legătura dintre sumele Stieltjes și sumele simetrice elementare, de Nicolae Anghel	57
2. O proprietate a funcțiilor continue și câteva consecințe, de Nicolae Bourbăcuț și Mihai Piticari	60

Pentru cercurile de elevi

3. Câteva probleme de combinatorică a mulțimilor, de Manuela Prajea	70
---	----

Examene și Concursuri

4. Concursul „Matematica în Bucovina. Memorial Vasile Poleșciuc“, Câmpulung Moldovenesc, 19 decembrie 2011, prezentare de Mihai Piticari și Vladimir Cerbu	73
--	----

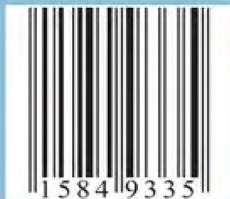
Probleme

5. Rezolvarea problemelor din Gazeta Matematică nr. 7-8-9/2011, partea I	77
6. Probleme pentru examene naționale.....	95
7. Probleme pentru ciclul primar (P:438 – P:447).....	97
8. Probleme pregătitoare pentru concursuri și olimpiade • Probleme pentru gimnaziu (E:14295 – E:14308)	98
• Probleme pentru liceu (26565 – 26578)	100

Rubrica rezolvitorilor de probleme



© Toate drepturile privind reproducerea, parțială sau totală, sub orice formă, a materialelor publicate în Gazeta Matematică, sunt rezervate Societății de Științe Matematice din România.



Colecția completă a Gazetei Matematice seria B, în format electronic
este realizată de Intuitext (www.intuitext.ro)
în parteneriat cu Societatea de Științe Matematice din România.

Preț 9 lei

LEGĂTURA DINTRE SUMELE STIELTJES ȘI SUMELE SIMETRICE ELEMENTARE

NICOLAE ANGHEL

Să presupunem că sunt date $n \geq 2$ numere reale distințe x_1, x_2, \dots, x_n . În acest caz sumele de tip

$$(1) \quad S_{n,k} := \sum_{i,i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

sunt de obicei numite *sume Stieltjes* (a se vedea *Observația 1*, mai jos). Scopul acestei note este de a explica prin mijloace foarte elementare simetria aparentă a sumelor Stieltjes. Mai precis, afirmăm că este posibil să se exprime $S_{n,k}$ în funcție de x_k singur și de sumele simetrice elementare $\sigma_1 = \sum x_1, \sigma_2 = \sum x_1 x_2, \dots, \sigma_{n-1} = \sum x_1 x_2 \dots x_{n-1}$. De exemplu, pentru valori mici ale lui n , ($n = 2$ sau $n = 3$) și pentru $k = 1$, avem

$$\begin{aligned} S_{2,1} &= \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2x_1 - (x_1 + x_2)} = \frac{1}{2x_1 - \sigma_1}, \quad \text{și} \\ S_{3,1} &= \frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_3} = \frac{2x_1 - (x_2 + x_3)}{x_1^2 - (x_2 + x_3)x_1 + x_2 x_3} \\ &= \frac{3x_1 - (x_1 + x_2 + x_3)}{x_1^2 - 2(x_2 + x_3)x_1 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)} = \frac{3x_1 - \sigma_1}{3x_1^2 - 2\sigma_1 x_1 + \sigma_2}. \end{aligned}$$

Este deci clar că sumele Stieltjes sunt legate de sumele simetrice elementare, dar abordarea naivă a problemei, ca mai sus, cu siguranță nu duce prea departe, în general.

Vom introduce în schimb funcția polinomială $P_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x + (-1)^n \sigma_n.$$

Evident, $P_n(x_i) = 0$ și $P'_n(x_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, deoarece numerele x_1, x_2, \dots, x_n sunt distințte. Avem deci

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= \left[\sum_{i,i \neq k} \frac{1}{x - x_i} \right]_{x=x_k} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} - \frac{1}{x - x_k} \right]_{x=x_k} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \left(\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} - \frac{1}{x - x_k} \right) = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x - x_k)P'_n(x) - P_n(x)}{(x - x_k)P_n(x)}. \end{aligned}$$

După două aplicații ale regulei lui l'Hôpital obținem

(2)

$$S_{n,k} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x - x_k)P''_n(x)}{(x - x_k)P'_n(x) + P_n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x - x_k)P'''_n(x) + P''_n(x)}{(x - x_k)P''_n(x) + 2P'_n(x)} = \frac{P''_n(x_k)}{2P'_n(x_k)}.$$

Pe de altă parte, $P'_n(x) = nx^{n-1} - (n-1)\sigma_1x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}$ și $P''_n(x) = n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)\sigma_1x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-2}2\sigma_{n-2}$. Concluzionăm astfel că

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= \frac{n(n-1)x_k^{n-2} - (n-1)(n-2)\sigma_1x_k^{n-3} + \dots + (-1)^{n-2}2\sigma_{n-2}}{2(nx_k^{n-1} - (n-1)\sigma_1x_k^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1})} \\ &= \frac{\sum_{i=2}^n (-1)^{n-i} \binom{i}{2} \sigma_{n-i} x_k^{i-2}}{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} i \sigma_{n-i} x_k^{i-1}}, \quad \text{unde } \sigma_0 := 1. \end{aligned}$$

Formula de mai sus reprezintă deci legătura căutată dintre sumele Stieltjes și sumele simetrice elementare. Rezultatul în sine dovedește că se pot spune lucruri interesante despre sumele Stieltjes a n numere și fără a se cunoaște efectiv acele numere. Similar, cunoașterea unui polinom, în fapt cunoașterea (pîna la un factor multiplicativ) sumelor simetrice elementare asociate rădăcinilor sale, aşa numitele relații Viète, nu implică nici pe departe cunoașterea efectivă a rădăcinilor polinomului. Demonstrația dată arată că această similaritate este de fapt o echivalență. Urmatoarea aplicație este menită să clarifice și mai mult acest aspect.

APLICAȚIE. Date două polinoame reale $U(x)$ și $V(x)$, să presupunem că un al treilea polinom $P_n(X)$, de grad $n \geq 2$ și cu rădăcini reale și necesar distințe, x_1, x_2, \dots, x_n , este soluție a ecuației diferențiale liniare omogene de ordinul doi,

$$(3) \quad y''(x) = U(x)y'(x) + V(x)y(x).$$

Atunci, sumele Stieltjes asociate rădăcinilor lui $P_n(x)$ satisfac relațiile

$$(4) \quad S_{n,k} = \frac{1}{2}U(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Intr-adevăr, din ecuația (3), aplicată lui $y(x) = P_n(x)$ pentru $x = x_k$, deducem

$$\frac{P''_n(x_k)}{2P'_n(x_k)} = \frac{1}{2}U(x_k) + \frac{V(x_k)P_n(x_k)}{2P'_n(x_k)},$$

care în virtutea ecuației (2) demonstrează relațiile (4). În ecuația de mai sus am folosit faptul că $P'_n(x_k) \neq 0$, o consecință a unui rezultat fundamental în teoria ecuațiilor diferențiale.

De exemplu, în cazul polinomului Hermite $H_n(x)$, definit prin formula [L],

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j n!}{j!(n-2j)!} (2x)^{n-2j},$$

și care satisfac ecuația diferențială $y''(x) = 2xy'(x) - 2ny(x)$, avem $S_{n,k} = x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, un rezultat cunoscut lui Stieltjes [S].

Incheiem această notă cu două observații.

OBSERVAȚIA 1. În afară de rezultatul lui Stieltjes de mai sus, sumele (1) mai apar în analiza complexă (drept reziduuri ale unor anumite funcții meromorfe), și în analiza spectrală (a operatorilor Schrödinger unu-dimensionalii cu potențial polinomial [A], cum ar fi cazul oscilatorului armonic).

OBSERVAȚIA 2. Transformarea $t \ni \mathbf{R}^n \rightarrow T_k(t) \in \mathbf{R}^n$ dată, pentru k fixat, $k = 1, 2, \dots, n$, de $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto T_k(t) = (t_k, \sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_{n-1}(t))$ poate fi interpretată ca o schimbare de coordonate în spațiul \mathbf{R}^n . Ca atare, problema studiată reprezintă pur și simplu realizarea unei anume expresii raționale în două sisteme de coordonate diferite.

BIBLIOGRAFIE

- [A] N. Anghel, *Entire Functions of Finite Order as Solutions to Certain Complex Differential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., (2011), sub tipar.
- [L] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ. Inc., New York (1972).
- [S] T. J. Stieltjes, *Sur Quelques Théorèmes d'Algèbre*, C. R. Acad. Sci. Paris **100**, 439-440, (1885).

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ, UNIVERSITATEA TEXASULUI DE NORD, DENTON, TX 76203
E-mail address: anghel@unt.edu